

Applications de la dérivation, cours, première S

1 Signe de la dérivée et variations de la fonction

1.1 Du sens de variation au signe de la dérivée

Propriété :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- Si f est croissante sur I , alors pour tout réel x de I , ;
- si f est décroissante sur I , alors pour tout réel x de I , ;
- si f est constante sur I , alors pour tout réel x de I ,

Preuve :

Soit $a \in I$ et $h \in I$ tel que $a + h \in I$ et $h \neq 0$.

Supposons que f est croissante sur I (les deux autres cas se justifient par la même méthode). On a alors $f(a + h) - f(a)$ si $h > 0$ et $f(a + h) - f(a)$ si $h < 0$.

D'où

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h} \dots\dots\dots$$

si $h > 0$ et

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h} \dots\dots\dots$$

si $h < 0$.

Par conséquent, quand h devient infiniment petit, $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ reste et sa limite $f'(a)$ aussi.

Exemple :

Soit f une fonction définie sur $[-3; 5]$ et telle que :

x	-3	-1	0	5
variations de $f(x)$	4		1	
		$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$
		-2		0

Alors la fonction dérivée f' a pour tableau de signes :

x	...	...	...	...
$f'(x)$	...	...	...	...

1.2 Du signe de la dérivée au sens de variation

Propriété :

- Si pour tout réel x de I , $f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) > 0$ sauf en un nombre fini de points où elle s'annule), alors f est (resp. strictement) sur I ;
- si pour tout réel x de I , $f'(x) \leq 0$ (resp. $f'(x) < 0$ sauf en un nombre fini de points où elle s'annule), alors f est (resp. strictement) sur I ;
- si pour tout réel x de I , $f'(x) = 0$, alors f est sur I .

Preuve :

Admis

Exemple avec un tableau de signes :

Soit f une fonction définie sur $[-3; 5]$ et telle que :

x	-3	-2	0	5	
signe de $f'(x)$	+	0	-	0	+

Le tableau de variations de f est :

x	...	...	...	...
variations de $f(x)$	...	...	...	...

Exemples par le calcul :

- On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^3 + 5$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , $f'(x) = \dots\dots\dots$
Donc pour tout réel x , $f'(x) \dots\dots\dots 0$ et par conséquent, f est une fonction sur $\mathbb{R}$.
- Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{4}{2x+3}$ pour tout x appartenant à $[3; +\infty[$.
On a $f'(x) = \dots\dots\dots$
Pour tout x appartenant à $[3; +\infty[$, le carré $(2x+3)^2$ est donc $f'(x) \dots\dots\dots 0$
donc f est strictement sur $[3; +\infty[$.

2 Dérivée et tableau de variation d'une fonction

2.1 Tableau de variation

Exemples :

- Soit f la fonction définie sur $] -\infty; +\infty[$ par $f(x) = 3x^2 + 7x$. f est dérivable sur $\mathcal{R}$ et pour tout réel x , $f'(x) = \dots$

$f'(x) \geq 0$ si et seulement si c'est à dire

On a donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	...	...	$+\infty$
$f'(x)$	...	0	...	...
$f(x)$	...	...	...	...

- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x + \frac{1}{x}$. Pour tout réel $x \neq 0$,

$$f'(x) = \dots$$

$$= \dots$$

$$= \dots$$

On a donc le tableau de variation :

x	$-\infty$	...	...	...	...	$+\infty$
$f'(x)$	...	...	...	...	...	...
$f(x)$	...	...	...	...	...	...

2.2 Dérivée, extrema et tableau de variation

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et x_0 un réel de I .

- Dire que $f(x_0)$ est un (resp.) de f signifie que l'on peut trouver un intervalle ouvert J inclus dans I et contenant x_0 tel que pour tout x de J , (resp.).
- Un minimum local ou un maximum local est appelé un

Propriété :

Si f est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I ouvert (c'est à dire de la forme $]a; b[$)

- Si f admet un maximum ou un minimum en $x_0 \in I$ avec x_0 , alors $f'(x_0) = \dots$;
- si f' s'annule en x_0 en changeant de signe, alors f admet en x_0 un

Preuve :

Supposons que f admet un maximum en x_0 appartenant à I . Alors pour tout x appartenant à I et inférieur strictement à x_0 , on a $f(x) - f(x_0) \dots \dots \dots$ et $x - x_0 \dots \dots \dots$. D'où $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \dots \dots \dots$ et quand x tend vers x_0 , on obtient $f'(x_0) \dots \dots \dots$. Par contre, pour tout x appartenant à I et supérieur strictement à x_0 on a $f(x) - f(x_0) \dots \dots \dots$ et $x - x_0 \dots \dots \dots$ donc $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \dots \dots \dots$ donc quand x tend vers x_0 on obtient $f'(x_0) \dots \dots \dots$. Par conséquent, $f'(x_0) = 0$. La deuxième partie de propriété est admise.

Visualisation :

Cas d'un minimum :

x	x_0
$f(x)$	

Cas d'un maximum :

x	x_0
$f(x)$	