Fonctions dérivées, cours, première S

F.Gaudon

13 mai 2010

Table des matières

1 Signe de la dérivée et variations de la fonction

1.1 Du sens de variation au signe de la dérivée

Propriété :

> Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
> - Si f est croissante sur I, alors pour tout réel x de I, $f'(x) \geq 0$;
> - si f est décroissante sur I, alors pour tout réel x de I, $f'(x) \leq 0$;
> - si f est constante sur I, alors pour tout réel x de I, $f'(x) = 0$.

Preuve :

Soit $a \in I$ et $h \in I$ tel que $a + h \in I$ et $h \neq 0$.

Supposons que f est croissante sur I (les deux autres cas se justifient par la même méthode). On a alors $f(a+h) - f(a) \geq 0$ si $h > 0$ et $f(a+h) - f(a) \leq 0$ si $h < 0$.

D'où

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \geq 0$$

si $h > 0$ et

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \geq 0$$

si $h < 0$.

Par conséquent, quand h devient infiniment petit, $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ reste positif et sa limite $f'(a)$ aussi.

Exemple :

Soit f une fonction définie sur $[-3; 5]$ et telle que :

x	-3		-1		0		5
variations de $f(x)$	4	↘	-2	↗	1	↘	0

Alors la fonction dérivée f' a pour tableau de signes :

x	-3		-1		0		5
$f'(x)$		-	0	+	0	-	

1.2 Du signe de la dérivée au sens de variation

Propriété :

> - Si pour tout réel x de I, $f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) > 0$ sauf en quelques points où elle s'annule), alors f est croissante (resp. strictement croissante) sur I ;
> - si pour tout réel x de I, $f'(x) \leq 0$ (resp. $f'(x) < 0$ sauf en quelques points où elle s'annule), alors f est décroissante (resp. strictement décroissante) sur I ;
> - si pour tout réel x de I, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.

Preuve :
admis

Exemple avec un tableau de signes :
Soit f une fonction définie sur $[-3;5]$ et telle que :

x	-3		-2		0		5
signe de $f'x)$		$+$	0	-	0	$+$	

Le tableau de variations de f est :

x	-3		-2		0		5
variations de $f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Exemples par le calcul :

- On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^3 + 5$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = 12x^2$. Donc pour tout réel x, $f'(x) > 0$ et par conséquent, f est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$.
- Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{4}{2x+3}$ pour tout x appartenant à $[3;+\infty[$.
  On a $f'(x) = -\frac{8}{(2x+3)^2}$.
  Pour tout x appartenant à $[3;+\infty[$, le carré $(2x+3)^2$ est toujours positif donc $f'(x) < 0$ donc f est décroissante strictement sur $[3;+\infty[$.

1.3 Tableau de variation

Exemples :

- Soit f la fonction définie sur $]-\infty;+\infty[$ par $f(x) = 3x^2 + 7x$. f est dérivable sur $\mathcal{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = 6x + 7$.
  $f'(x) \geq 0$ si et seulement si $6x + 7 \geq 0$ c'est à dire $x \geq \frac{-7}{6}$.
  On a donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{7}{6}$		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x + \frac{1}{x}$.
  Pour tout réel $x \neq 0$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{x^2-1}{x^2} \\ &= \frac{(x-1)(x+1)}{x^2} \end{aligned}$$

On a donc le tableau de variation :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	-	$\|$	-	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	-2	$\searrow$	$\|$	$\searrow$	2	$\nearrow$	

1.4 Dérivée, extrema et tableau de variation

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et x_0 un réel de I.

- Dire que $f(x_0)$ est un *maximum local* (resp. *minimum local*) de f signifie que l'on peut trouver un intervalle ouvert J inclus dans I et contenant x_0 tel que pour tout x de J, $f(x) \leq f(x_0)$ (resp. $f(x) \geq f(x_0)$).
- Un minimum local ou un maximum local est appelé un extremum local.

Propriété :

Si f est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I ouvert (c'est à dire de la forme $]a;b[$)

- Si f admet un maximum ou un minimum en $x_0 \in I$ avec x_0, alors $f'(x_0) = 0$;
- si f' s'annule en x_0 en changeant de signe, alors f admet en x_0 un extremum local.

Preuve :

Supposons que f admet un maximum en x_0 appartenant à I. Alors pour tout x appartenant à I et inférieur strictement à x_0, on a $f(x) - f(x_0) \geq 0$ et $x - x_0 < 0$. D'où $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} < 0$ et quand x tend vers x_0, on obtient $f'(x_0) \geq 0$. Par contre, pour tout x appartenant à I et supérieur strictement à x_0 on a $f(x) - f(x_0) \geq 0$ et $x - x_0 > 0$ donc $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0$ donc quand x tend vers x_0 on obtient $f'(x_0) \leq 0$. Par conséquent, $f'(x_0) = 0$. La deuxième partie de propriété est admise.

Visualisation :

Cas d'un minimum :

x		x_0	
$f'(x)$	-	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$f(x_0)$	$\nearrow$

Cas d'un maximum :

x		x_0	
$f'(x)$	$+$	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	$f(x_0)$	$\searrow$

Remarque :

On peut avoir $f'(a) = 0$ pour un réel a appartenant à I sans que f n'admette d'extremum local en a. Par exemple, pour $f(x) = x^3$, on a $f'(0) = 0$ mais f n'admet pas d'extremum en 0.

2 Valeurs intermédiaires

Propriété :

> Soit f une fonction dérivable et strictement monotone sur un intervalle $[a;b]$. Si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, alors l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution sur $[a;b]$.

Exemple :
Soit f la fonction définie pour tout réel $x \in [-1;1]$ par $f(x)=x^2-3x$. f est dérivable sur $[-1;1]$ et $f'(x)=2x-3$. $f'(x)>0$ si et seulement si $2x-3>0$ c'est à dire $2x>3$ ou encore $x>3/2$ donc pour tout $x \in [-1;1]$, $f'(x)<0$ et f est strictement décroissante sur $[-1;1]$. Comme $f(-1)=4$ et $f(1)=-1$, il existe donc une unique valeur de x pour laquelle $f(x)=0$. C'est bien entendu 0 ici.

Algorithmique :
Algorithme dit de dichotomie pour l'obtention d'une valeur approchée à e près de l'équation $f(x)=0$ où f est une fonction définie et dérivable sur un intervalle $[a;b]$ qui s'annule dans cet intervalle :

```
Données : a, b, e
Début traitement
    tant que b-a>e faire
        m prend la valeur (b+a)/2
        si f(m) > 0 alors
            m prend la valeur de b
        sinon
            m prend la valeur de a
        fin
    fin
    Afficher m
Fin traitement.
```

Exemple :
Soit f définie par $f(x)=x^2-2$. On recherche ici, une valeur approchée de la solution positive de $f(x)=0$ (c'est à dire une valeur approchée de $\sqrt{2}$) sur $[1;2]$.

TI :	Casio :	XCas :

Prompt A,B,E
While $B-A>E$
$(B+A)/2 \triangleright M$
If $M^2-2>0$
Then
$B \triangleright M$
Else
$A \triangleright M$
End
End
Disp "M=",M
	"A" :?$\rightarrow A$
	"B" :?$\rightarrow B$
	"E" :?$\rightarrow E$
	While $B-A>E$
	$(A+B)/2 \rightarrow M$
	If $M^2-2>0$
	Then
	$B \rightarrow M$
	Else
	$A \rightarrow M$
	ifEnd
	WhileEnd
	"U" :U◢
		`saisir("a =",a);`
		`saisir("b =",b);`
		`saisir("e =",er);`
		`tantque (b-a>er) faire`
		`m:=(a+b)/2;`
		`si m^2-2>0 alors`
		`b:=m sinon a:=m;`
		`fsi;`
		`ftantque`
		`afficher("valeur approchée :",m);`