Chapitre 8 Application de la dérivation

Le programme officiel :

Lien entre signe de la dérivée et sens de variation. Extremum d'une fonction.	• Exploiter le sens de variation pour l'obtention d'inégalités.	Il n'est pas toujours utile de recourir à la dérivation pour étudier le sens de variation d'une fonction. On traite quelques problèmes d'optimisation.

Prérequis indispensable :

- Sens de variation d'une fonction (Seconde)
- Tableau de signe (Seconde)
- Le nombre dérivé d'une fonction (1S)
- Dérivation d'une fonction (1S)

Objectif : Construire le tableau de variation d'une fonction et déterminer les extremums s'ils existent.

I Etude de fonctions.

1. Théorème du sens de variation.

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Alors on a :

- f est croissante équivaut à $f'(x) > 0$.
- f est constante équivaut à $f'(x) < 0$.
- f est constante équivaut à $f'(x) = 0$.

Démo du premier point.

Soit x un élément de I et h tel que x+h appartient aussi à I.

- Montrons l'implication c'est-à-dire f est croissante => $f'(x) > 0$.

Si $h > 0$ alors $x+h > x$ donc $f(x+h) > f(x)$ car f est croissante et $m(h) = f(x+h)-f(x) /h >0$.
Si $h < 0$ alors $x+h < x$ donc $f(x+h) < f(x)$ car f est croissante et $m(h) = f(x+h)-f(x) /h >0$.
Donc dans tous les cas m(h) est positif. Si f est dérivable en x alors f'(x) existe et ne peut être que de signe positif.

- Montrons la réciproque, c'est-à-dire $f'(x) > 0$ => f est croissante.

Si f'(x) est positif alors m(h) l'est aussi. Or $m(h) = f(x+h)-f(x) /h$ donc deux cas :
Si $h > 0$ alors $f(x+h) > f(x)$ or $x+h > x$ donc f conserve l'ordre et f est croissante.
Si $h < 0$ alors $f(x+h) < f(x)$ or $x+h < x$ donc f est croissante.
Conclusion si $f'(x) >0$ alors f est croissante.

Un raisonnement identique démontre le deuxième point.
A faire seul, le troisième point.

Application : Etudier le sens de variation de $f(x) = x^2 +2x - 8$
Pour ce faire :

1. Dériver f

2. Etudier le signe de f' et synthétiser les résultats dans un tableau.
3. **Compléter** le sens de variation en utilisant le théorème.
4. Vérifier vos résultats à l'aide de votre calculatrice.

II Etude des extremums locaux.

Définitions :
On dit que la fonction f définie sur I admet un extremum sur I atteint en l'abscisse *a* si pour tout x de I, on a soit f(x) > f(*a*) et on dit que f(*a*) est un minimum ou soit f(x) < f(*a*) et on dit que f(*a*) est un maximum.

Remarques :

- Il peut y avoir deux extremums : un max et un min.
- Ne pas confondre l'abscisse a de l'extremum et son ordonnée f(a) qui est la valeur extremum de f sur I.

Théorème de l'extremum : (admis)

Soit *f* est une fonction dérivable sur I et *a* un élément de I.
Si *f(a)* est un extremum alors on a *f '(a)* = 0.

Attention : Condition nécessaire mais pas suffisante.

Contre exemple avec la fonction x^3 en *a* = 0.

Rem et théorème pour que la réciproque soit vraie il faut ajouter une condition :
Soit *f* est une fonction dérivable sur I et *a* un élément de I.
Si *f* ' s'annule en *a* et change de signe alors *f(a)* est un extremum local pour f.

Méthodologie 1 :
Le dernier théorème donne donc une méthode pour déterminer les extremums d'une fonction, il suffit d'aller chercher les solutions de *f* '(x) = 0 !

Méthodologie 2 :
Pour montrer qu'une fonction est négative, il suffit de montrer que son maximum est négatif.
Pour montrer qu'une fonction est positive, il suffit de montrer que son minimum est positif.

Compétences à atteindre :

- Déterminer les variations d'une fonction.
- Déterminer les extremums d'une fonction à l'aide de son tableau des variations.
- Résoudre des problèmes d'optimisation à l'aide du tableau de variation.
- Résoudre des inégalités à l'aide du tableau de variation d'une fonction.