Calcul des coefficients de Bézout

1. Un exemple :

On utilise l'algorithme d'Euclide pour trouver le PGCD de 47 et 35 :

Etape 1 : $47 = 35\times 1 + 12$
Etape 2 : $35 = 12\times 2 + 11$
Etape 3 : $12 = 11\times 1 + 1$
Etape 4 : $11 = 1\times 11$

Le dernier reste non nul est 1, donc PGCD(47,35) =1.
De l'étape 1, déduire $u_2\in\mathbb{Z}$ et $v_2\in\mathbb{Z}$ tels que $12 = 47u_2 + 35v_2$.
A l'étape 2, $11 = 35 - 12\times 2$. En déduire $u_3\in\mathbb{Z}$ et $v_3\in\mathbb{Z}$ tels que $11 = 47u_3 + 35v_3$.
A l'étape 3, $1 = 12 - 11\times 1$. En déduire $u_4\in\mathbb{Z}$ et $v_4\in\mathbb{Z}$ tels que $1 = 47u_4 + 35v_4$.

2. Principe de calcul « par descente » de l'algorithme d'Euclide :

On se propose de trouver un algorithme permettant de calculer rapidement, à l'aide de l'algorithme d'Euclide, les coefficients entiers u et v tels que $au + bv$ = PGCD (a,b) où a et b sont des entiers naturels non nuls avec $a > b$ (par exemple $a = 47$ et $b = 35$).

On pose $u_0 = 1$; $v_0 = 0$ et $u_1 = 0$; $v_1 = 1$.
Vérifier que $a = au_0 + bv_0$ et $b = au_1 + bv_1$.
Vérifier que $r_1 = au_2 + bv_2$ avec $u_2 = u_0 - q_1u_1$

et $v_2 = v_0 - q_1v_1$

Démontrer de même que $r_2 = au_3 + bv_3$ avec
$u_3 = u_1 - q_2u_2$ et $v_3 = v_1 - q_2v_2$.

En réitérant ce procédé on montre que les restes r_k s'écrivent sous la forme $r_k = au_{k+1} + bv_{k+1}$ avec $u_{k+1} = u_{k-1} - q_ku_k$ et $v_{k+1} = v_{k-1} - q_kv_k$ …On poursuit jusqu'au dernier reste non nul r_n qui est encore le PGCD (a,b) .Ainsi $r_n = PGCD(a,b) = au_{n+1} + bv_{n+1}$.

<u>Application pour a = 47 et b = 35</u>.On peut présenter les calculs comme il suit :

a = 47		Uo = 1	Vo = 0
b = 35	quotients	U1 = 0	V1 = 1
R1=12	Q1 = 1	U2=U0-Q1U1=1	V2=V0-Q1V1= -1
R2=11	Q2 = 2	U3=0-2= -2	V3=1+2= 3
R3=1	Q3 = 1	U4= 1+2=3	V4= -1-3= -4
R4=0			

3. Avec un tableur :

Entrer dans les cellules A1, A2, B2, C1, C2, D1, D2 : 47, 35, quotients, 1, 0, 0, 1.
En A3, taper =SI(OU(A2=0 ;A2= «fin»);« fin »;MOD(A1 ;A2)).
En B3, taper =SI(OU(A3=0 ;A3=«fin»);«fin»;ENT(A1/A2)).
En C3, taper =SI(OU(A3=0 ;A3=«fin»);«fin»;C1-B3*C2).
En D3, taper =SI(OU(A3=0 ;A3=«fin»);«fin»;D1-B3*D2).
Sélectionner la plage A3 :D3, recopier vers le bas.
Recommencer avec d'autres valeurs : a =32527 et b=5591 ; a=1459873 et b=857 ; a=95723 et b=217….

A retenir : **Syntaxe :**

SI(**test_logique**;**valeur_si_vrai**;valeur_si_faux) avec test_logique représente toute valeur ou expression qui peut prendre la valeur VRAI ou FAUX.

OU(**valeur_logique1**;valeur_logique2,...) avec valeur_logique1, valeur_logique2, ... sont de 1 à 30 conditions que vous souhaitez tester, et qui peuvent être soit VRAI, soit FAUX.

4. Autres méthodes de résolution.

On pourra motiver l'étude de l'équation $47x + 35y = 1$ par la recherche des points à coordonnées entières situés sur la droite d'équation $y = \frac{-47}{35}x + \frac{1}{35}$.
A l'aide d'un tableau de valeurs, essayer toutes les valeurs entières de 0 à 34 jusqu'à trouver une valeur entière de y. On peut démontrer que si l'on n'en trouve pas entre 0 et 34, alors l'équation n'a pas de solution.

Si on connaît une solution, on sait trouver toutes les autres :
L'équation $47x + 35y = 1$ a au moins une solution dans $\mathbb{Z}^2$: $x_0 = 3$ et $y_0 = -4$.
Par suite $(x\,;y)$ est solution de l'équation si : $47(x - x_0) + 35(y - y_0) = 0$. D'où une relation de proportionnalité entre $x - x_0$ d'une part et $y - y_0$ d'autre part. Ce qui conduit à $x = 3 + 35k$ et $x = 3 + 35k$, k$\in\mathbb{Z}$.